ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve

(Coef. 5)

Mardi 22 Mai 1979 de 8h à 12h

P R E A M B U L E

Les applications de ce problème sont réelles et définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

I - Page double de résultats.

Les résultats et graphes sont consignés sur la même face d'une double page aux emplacements indiqués par le tableau explicité en fin de texte. En particulier en C - III et V les tableaux de variation et les graphes auront "leurs abscisses" sur les mêmes "verticales". Les légendes T_1 et T_2 ont été sorties grossies du tableau pour pouvoir les lire. Rien ne devra figurer au verso de cette page de résultats. D'une manière impérative on représentera en bleu les graphes Γ_1, Γ_3 et G et en rouge les autres H, Γ_2, Γ_4 et $\tilde{G}$.

Tout résultat ou graphe demandé et ne figurant pas à la place indiquée du tableau invalidera l'ensemble de la question qui se verra aussitôt créditée d'un zéro.

II - Rappels : extensions éventuelles de f et notations. f, z sont des applications.

1°) Dans tout le problème on entend par limite d'une fonction, quand la variable tend vers un nombre a, une limite finie.

2°) f(a+0) : On désigne par f(a+0) la limite quand elle existe de f(x) quand x tend vers a à droite, donc par valeurs supérieures.

3°) f(a-0) : On désigne par f(a-0) la limite quand elle existe de f(x) quand x tend vers a à gauche, donc par valeurs inférieures.

4°) Δx : pour x voisin de a, il sera commode de poser $\Delta x = x - a$.

5°) Dérivée à droite en un point x = a. $\frac{\Delta z}{\Delta x}(a+0)$ représente si elle existe, la limite de $\frac{z(x) - z(a)}{x - a}$ quand x tend vers a à droite. (Définition et notation analogues à gauche).

6°) f prolongée en un point a par continuité : Si f non définie en $a \in \mathbb{R}$ possède l'une des propriétés exclusives suivantes :

1. seule existe une des deux limites f(a+0) ou f(a-0),
2. les deux limites existent et sont égales,

alors f est prolongée en a en prenant pour f(a) la limite indiquée en 1. ou 2.

7°) $\bar{f}$ ou f prolongée par continuité. Si cette extension est faite partout ou elle est possible nous dirons que f a été prolongée par continuité. Cette extension est alors désignée par $\bar{f}$.

8°) Dans A, 2°) la notation Log représente le logarithme népérien.

.../...

-2-

PROBLEME

A. 1°) a) Soit l'application définie par $y = f(x) = \frac{x}{x}$. Préciser les graphes G et $\bar{G}$ de f et $\bar{f}$.

b) Soit la relation x.y = x . Quel est son graphe H ?

c) Représenter G et H dans le même repère.

2°) Soit l'application définie par $f(x) = \sqrt{x}\ \text{Log}\ x + (x-2)\ \text{Log}\ |x-2|$. Préciser les domaines de définition de f et $\bar{f}$.

B. X étant un ensemble non vide nous savons que $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble de ses parties. A toute application f : X → Y on associe l'application contre-image $\overset{\bullet}{f}^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ qui à tout B ⊂ Y associe l'ensemble $\overset{\bullet}{f}^{-1}(B)$ des x tels que f(x) ∈ B. Si pour tout y ∈ Y $\overset{\bullet}{f}^{-1}(\{y\})$ est réduite à un point on définit $f^{-1} : Y \to X$ par $f^{-1}(y) = \overset{\bullet}{f}^{-1}(\{y\})$. Comment appelle-t-on f^{-1} ?

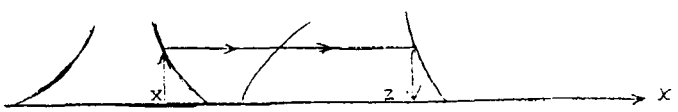
Soit alors $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ définie par f(x) = sin (x). Montrer que f^{-1} existe ; posant alors $f^{-1}(x) = \text{Arc sin } x$ donner les graphes Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de

1) $y = \text{Arc sin } x$, 2) $y = \text{Arc sin } 2x$, 3) $y = \text{Arc sin}(\sin 3x)$,

4) $y = \text{Arc sin } (\cos 3x)$. Bien préciser les domaines de définition de ces fonctions.

On représentera Γ_1 et Γ_2 sur le même repère puis Γ_3 et Γ_4 sur un même nouveau repère.

C.



Dans la suite du problème à toute application f de graphe G on associe l'application $\tilde{f}$ de graphe $\tilde{G}$ où $\tilde{f}$ est l'application $x \mapsto \text{Sup}\ \overset{\bullet}{f}^{-1}(\{f(x)\})$ prolongée par continuité. On pose y = f(x) et z = $\tilde{f}$(x) donc $z = \tilde{f}(x) = \text{Sup}\ \overset{\bullet}{f}^{-1}(\{f(x)\})$ sous les notations rencontrées. Dans l'étude des exemples suivants, on pourra utiliser les fonctions réciproques de certaines restrictions de f.

I - Quelle est l'application $\tilde{f}$ associée à f(x) = 2x+1 ? Représenter dans les mêmes repères G et $\tilde{G}$.

II - Quelle est l'application $\tilde{f}$ associée à $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$; préciser $\tilde{f}$ en -1, 0 et 1. Représenter dans le même repère G et $\tilde{G}$.

III - Soit l'application $\tilde{f}$ associée à f définie par $f(x) = \frac{-2(x^2+2x+9)}{(x-7)(x+1)}$.

1) Donner les deux éléments de $\overset{\bullet}{f}^{-1}(\{3\})$.

2) Préciser f et $\tilde{f}$ en x = -1 et x = 1.

3) Calculer : $\varphi(x) = x.z + 2(x+z)$ pour $x \neq z$.

4) Donner dans un même repère les graphes G et $\tilde{C}$.

IV - Soient les graphes C_1, C_2 , L_1 et L_2

- du cercle C_1 centré en (0,4) et de rayon 4
- du cercle C_2 centré en (16,12) et de rayon 12
- des fonctions y = Log (x+1) et y = Log (x-4)

.../...

1°) Déterminer $\tilde{f}(0)$ puis les limites à gauche et à droite de $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x}$ quand le graphe de f restreint à la bande $B = [-4,\infty[\times [0,4]$ est donné par

a) $B \cap L_1$, b) $B \cap C_1$, c) $B \cap (C_1 \cup L_2)$, d) $B \cap (C_1 \cup C_2)$.

2°) Pour $B \cap (C_1 \cup L_2)$ donner un développement limité de $\tilde{f}(x)$

a) à l'ordre 4 en x = 0 par rapport à $\frac{\Delta x}{4} = \frac{x}{4}$.

b) à l'ordre 3 en $x = 2\sqrt{2}$ par rapport à $\Delta x = x-2\sqrt{2}$.

c) à l'ordre 3 en x = 4 par rapport à $h = \sqrt{-\frac{\Delta x}{8}}$ où $\Delta x = x-4 < 0$.

V - Soit enfin $\tilde{f}$ l'application associée à f définie par :

$$y = f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x-4} + \frac{6}{x-6} + \frac{8}{x-8}$$

1°) Calculer $\tilde{f}(x)$ et sa dérivée $\tilde{f}'(x)$ pour x = 2, x = 4, x = 6 et x = 8.

2°) G coupe l'axe des x en trois points d'abscisses α, β et γ ($\alpha < \beta < \gamma$). (Nous supposons connus les trois nombres α, β, γ et les trois dérivées $f'(\alpha)$, $f'(\beta)$, $f'(\gamma)$). Etablir l'existence et donner les valeurs de $\tilde{f}$ et de sa dérivée à droite pour $x \in \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Equiper des résultats du 1° et 2° le tableau de $\tilde{f}$ et f (à droite de T_1).

3°) Construire G et $\tilde{G}$ dans deux repères distincts.

Feuille de résultats,
les repères sont orthonormés.

Γ_1, Γ_3, G en bleu
H, Γ_2, Γ_4, $\tilde{G}$ en rouge.

Le tableau ci-dessous doit occuper toute la surface d'une double page.

T_2

$z = \tilde{f}(0)$
$\frac{\Delta z}{\Delta x}$ (0-0)
$\frac{\Delta z}{\Delta x}$ (0+0)

T_1

x
$y' = f'(x)$
$y = f(x)$
$\frac{\Delta z}{\Delta x}$ (x-0), z', $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ (x+0)
$\tilde{f}$(x-0), z, $\tilde{f}$(x+0)

A 1°) y G et H x

III y z G et $\tilde{G}$ x

V y G x

B y Γ_1 et Γ_2 x y Γ_3 et Γ_4 x

$\varphi(x)$=

T_1

IV 1°) a b c d

T_2

2°) a) Δz =

b) Δz =

c) Δz =

C II y z G et $\tilde{G}$ x

V z $\tilde{G}$ x

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail